

Graffärgning och kromatiska formler

Henrik Bäärnhielm, d98-hba

2 mars 2000

Sammanfattning

I denna uppsats beskrivs, för en ickematematiker, färgning av grafer samt kromatiska formler för grafer. Det hela görs genom att vi löser ett litet problem, formulerat i vardagliga termer, och går igenom en del matematik som behövs för lösningen. Meningen är att det skall räcka med gymnasiekunskaper i matematik för att kunna ta till sig texten. Syftet är att för en ickematematiker beskriva hur matematik kan användas i vardagliga sammanhang.

Innehåll

| | |
|--|----------|
| 1 Inledning | 2 |
| 2 Problem | 2 |
| 3 Matematik | 2 |
| 3.1 Färgläggning | 3 |
| 3.2 Kromatiska formeln | 4 |
| 3.2.1 Hitta kromatiska formeln | 4 |
| 4 Problemets lösning | 6 |
| 4.1 Modellering | 6 |
| 4.2 Lösning | 7 |
| 5 Slutsats | 8 |
| Referenser | 9 |

1 Inledning

Denna uppsats är en del av examinationen i kursen 5B1204 Diskret matematik för D2, våren 2000, vid Kungliga Tekniska Högskolan. Jag kommer här att presentera ett konkret problem, modellera problemet med matematik och lösa problemet.

Min avsikt är att det skall räcka med gymnasiets matematikkunskaper för att kunna följa resonemangen, så problemet kommer att beskrivas i vardagliga ordalag och matematiken kommer att hållas på en förhoppningsvis lagom nivå. Den främsta målgruppen är folk som gått ut gymnasiet för inte alltför länge sedan. Givetvis kan alla ta del av innehållet, men det är för min tänkta målgrupp som det studerade problemet är mest relevant.

Syftet med uppsatsen är att för en icke-matematiker visa hur matematik kan användas i vardagliga sammanhang, och i slutet av uppsatsen följer en slutsats där samspelet mellan det studerade problemet och matematiken förtydligas.

2 Problem

Det problem jag tänkte kasta mig över kan man kalla ett "flyttproblem". Vi tänker oss situationen att Lisa skall flytta hemifrån, och ta med sig alla sina saker. Hon får några flyttlådor för detta ändamål, men det uppstår ett problem, nämligen att vissa saker inte bör ligga i samma låda, för då finns risken att de kan skada varandra. Lisas CD-skivor bör till exempel inte ligga tillsammans med hennes dator, eftersom CD-skivorna och deras fodral då kan råka krossas av datorn. Lisa vill även ta med så få lådor som möjligt, så att det inte blir så otympligt. Frågan är, vad är det minsta antal lådor som behövs?

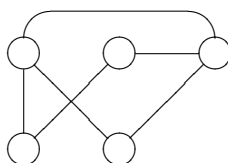
När Lisa har löst problemet och packat sina lådor går hon iväg för att äta. Då passar Lisas yngre bror Pelle på att busa och packa upp alla lådor igen. Lisa har bråttom och packar snabbt alla lådor igen, men när hon gjort det märker hon att packningen blev annorlunda än förra gången, eftersom hon mest rafsade ihop alltihop denna gång. Uppfylld av nyfikenhet och lust till problemlösning frågar Lisa sig på hur många sätt det egentligen går att packa ner sakerna, om man har ett visst antal lådor till förfogande.

Vi kan redan nu avslöja att lösningen kommer bero på vilka och hur många saker Lisa packar ner. Det mest avgörande kommer dock att vara hur sakerna förhåller sig till varandra, alltså vilka som kan ha sönder vilka.

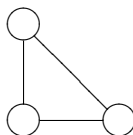
3 Matematik

Den matematik som jag hade tänkt att vi skulle använda för att lösa problemet kallas *grafteori*. En *graf* är i detta sammanhang en figur, som kan ritas upp på ett papper, och som består av *noder* förbundna med *kanter*. Noderna brukar ritas som cirklar och kanterna som streck mellan cirklarna, vilket visas i figur 1 och 2. Ibland tillåter man att det går flera kanter mellan två noder, och att en kant kan gå från en nod tillbaka till samma nod, men vi kommer inte att ha några sådana grafer här.

För den som undrar över terminologin kan sägas att ordet "kant" kommer av att vissa tredimensionella figurer, till exempel kuber, kan "plattas ut" till en graf på ett papper. Kubens hörn blir då noder och kubens kanter blir, just det, kanter i grafen.



Figur 1: Exempel på en graf



Figur 2: En annan graf

3.1 Färgläggning

Man kan säga åtskilligt om dessa grafer, men här skall vi enbart ta upp det som behövs för att lösa vårt problem. En generell fråga inom grafteori är frågan om *nodfärgning*: Man vill ge varje nod en viss färg, och de noder som är sammankopplade med en kant får inte ha samma färg. Detta är intressant eftersom många konkreta problem kan återföras på detta problem med nodfärgning, så även vårt problem med flyttlådor, vilket vi skall se i avsnitt 4.

Det är klart att man kan färga alla noderna med varsin färg, då får ju ingen nod samma färg som någon nod den är sammankopplad med, men den lösningen är inte så intressant. Frågan är hur många färger som *minst* behövs för att färglägga noderna. Detta antal färger kallas för det *kromatiska talet* för en graf. Om vi kallar grafen vi arbetar med för G , brukar det kromatiska talet betecknas $\chi(G)$, och detta tal är förstas olika för olika grafer.

Det är ganska lätt att inse att det bara är grafer utan några kanter alls som klarar sig med en enda färg. Är grafen liten kan man sen pröva att färglägga den med olika antal färger och på det sättet se hur många färger som behövs, men det är i allmänhet svårt att bli helt säker på att man hittat det minsta antalet färger. Lyckas man göra en färgläggning med ett visst antal färger vet man att det åtminstone inte behövs fler än detta antal, men det kan finnas färgläggningar med färre färger, fast man inte lyckats hitta dem än. Om man tror att ett visst antal färger är det minsta som behövs, måste man alltså föra ett resonemang om *varför* det inte går att färglägga grafen med färre färger. Det räcker inte att bara pröva med färre färger och se att det inte går.

3.2 Kromatiska formeln

En annan frågeställning runt nodfärgning är *på hur många sätt* det går att färglägga en viss graf, om man har ett visst antal färger till förfogande. Tittar vi exempelvis på grafen i figur 2 och tänker oss att vi har 3 färger, så kan vi sätta färg 1 i övre vänstra noden, färg 2 i nedre vänstra och färg 3 i den högra noden, vilket ger ett sätt att färga grafen. Det går dock även att sätta färg 1 i den högra noden och färg 3 i den övre vänstra, medan färg 2 får vara kvar i nedre vänstra noden, och detta är ett annat sätt att färga grafen.

Om man har färre antal färger än det kromatiska talet, går det inte att göra någon färgläggning alls som uppfyller villkoret att sammankopplade noder skall ha olika färger, eftersom det kromatiska talet var det minsta antal färger man behövde för att kunna färglägga grafen på detta sätt. Då finns det alltså 0 sätt att färglägga grafen, men har man tillgång till fler färger blir det mer komplicerat. Om vi som exempel försöker färga grafen i figur 2 med 5 färger, så kan vi först färga den övre vänstra noden med någon av de 5 färgerna, vilket ger 5 sätt att färga noden. Noden nedanför kan sedan färgas med någon av de 4 färgerna som är kvar, eftersom den inte får ha samma färg som den övre vänstra, de är ju sammanbundna, så mittennoden kan färgas på 4 sätt. Därefter kan den högra noden färgas på 3 sätt, eftersom den inte får färgas med samma färg som någon av de två andra noderna, den är ju sammanbunden med båda. Totalt kan grafen då färgas på $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olika sätt, om vi har 5 färger till förfogande, eftersom man multiplicerar antalen för varje nod. Det blir som synes rätt mycket räkne- och tankearbete bara för denna enkla graf, så är det verkligen möjligt att ta reda på antalet sätt att färga en mycket mer komplicerad graf?

Svaret är ja, för som tur är går det att ställa upp en matematisk formel för varje graf, som anger på hur många sätt det går att färglägga grafen med ett visst antal färger. Denna formel kallas för grafens *kromatiska formel*, och är inte alltid helt enkel att ta fram, men det finns vissa hjälpmedel. Kallar vi återigen grafen vi arbetar med för G , brukar den kromatiska formeln betecknas $P(G, k)$ där k anger antalet tillgängliga färger. Om vi sätter in ett värde på k i formeln får vi alltså ut på hur många sätt grafen G kan färgas med k stycken färger.

Vi skall snart ta fram ett bra hjälpmedel för att ta fram den kromatiska formeln, men först kan vi tillägga att vårt resonemang ovan med grafen i figur 2 kan föras generellt för vilket antal färger som helst, så om vi kallar grafen för G får vi:

$$P(G, k) = k(k - 1)(k - 2)$$

Sätter vi in 5 som k så får vi 60, precis som ovan.

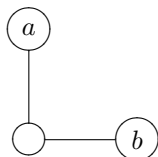
3.2.1 Hitta kromatiska formeln

Vi fortsätter att kalla grafen vi arbetar med för G , och tar sedan bort en kant, vilken som helst, från G . Kanten vi tar bort kallar vi e och den graf som återstår kallar vi G_e . Den resterande grafen G_e är alltså likadan som G , förutom att den saknar en av kanterna. De noder som den borttagna kanten e gick mellan kallar vi a och b , och om vi "för samman" dessa noder till en så får vi en ny graf, som vi kallar G'_e . Detta kan nog vara svårt att se framför sig, så vi tar ett exempel med

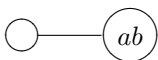
vår graf från figur 2. I figur 3, 4 respektive 5 visas de tre stegen som beskrivits ovan.



Figur 3: Grafen G



Figur 4: Grafen G_e



Figur 5: Grafen G'_e

Man kan fråga sig vad denna borttagning av kanter skall vara bra för, men det fina visar sig i följande *dekompositionsprincip* för kromatiska formler, som med symboler skrivs:

$$P(G, k) = P(G_e, k) - P(G'_e, k)$$

Det går alltså att få fram antalet sätt att färga grafen G med k färger genom att räkna ut på hur många sätt vi kan färga grafen G_e (en borttagen kant) med k färger, och från detta antal subtrahera antalet sätt att färga grafen G'_e (en borttagen kant och sammanförda noder) med k färger. Är antalet sätt att färga G_e och G'_e svåra att beräkna för hand kan man, genom att ta bort en kant och föra samman två noder, dela upp dessa två grafer var för sig, så att man får 4 andra grafer med ännu färre kanter. Är även dessa svåra att räkna på kan man dela upp dem i 8 andra grafer, och så kan man hålla på tills man får så små grafer att man för hand kan räkna ut antalet sätt att göra en färgning. Sedan använder vi dekompositionsprincipen för att föra samman det vi räknat ut för alla mindre grafer.

Om vi vill ta fram den kromatiska formeln för grafen G i figur 3 räcker det alltså med att ta fram de kromatiska formlerna för graferna G_e och G'_e i figur 4 respektive figur 5. Detta är lättare, och vi räknar ut att $P(G_e, k) = k(k-1)^2$,

eftersom mittenoden har k färger att välja mellan, medan de andra noderna då bara får $k - 1$ färger att välja mellan, eftersom de är sammanbundna med mittenoden. På liknande sätt räknar vi ut att $P(G'_e, k) = k(k - 1)$.

Nu kan vi räkna ut den kromatiska formeln för vår ursprungliga graf G , genom att föra samman de kromatiska formlerna för G_e och G'_e , enligt dekompositionsprincipen. Formeln blir

$$P(G, k) = P(G_e, k) - P(G'_e) = k(k - 1)^2 - k(k - 1) = k(k - 1)(k - 2)$$

Strax innan avsnitt 3.2.1 bestämde vi den kromatiska formeln för grafen G direkt, utan att använda dekompositionsprincipen, och vi fick då samma resultat, så principen verkar stämma. För att visa att den fungerar mer generellt kan man resonera enligt följande: Antalet sätt att färga G_e måste vara summan av antalet sätt där a och b får *olika* färger och antalet sätt där a och b får *samma* färg. Återställer vi kanten e mellan a och b får vi endast det första av dessa båda värden, vilket är lika med antalet sätt att färga G , eftersom det bara är när a och b har olika färg som vi då får en korrekt färgning. För vi istället samman a och b får vi endast det andra av de båda värdena, d.v.s. lika med antalet sätt att färga G'_e , eftersom a och b är samma nod och måste ha samma färg. Men det vi just har sagt är att antalet sätt att färga G_e är antalet sätt att färga G plus antalet sätt att färga G'_e , vilket är precis vår dekompositionsprincip.

Att man kan göra enligt ovanstående måste nog anses rätt fascinerande, och det är sådant som gör matematik intressant.

4 Problemets lösning

Nu är vi då äntligen i stånd att angripa våra små problem från avsnitt 2. Läsaren har kanske redan anat hur problemet med att hitta det minsta antalet flyttlådor kan modelleras matematiskt, efter att ha tagit sig igenom genomgången i förra avsnittet.

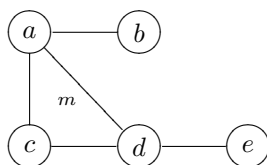
4.1 Modelling

Det man gör är att bilda en graf där noderna är de olika saker som Lisa har. För att sedan markera vilka saker som inte får ligga i samma låda sätter man en kant mellan de motsvarande noderna. Om man nu färgar grafen kan man låta den färg en viss nod får motsvara den låda som tillhörande sak skall hamna i. Saker som inte får ligga i samma låda kommer inte att göra det heller, eftersom tillhörande noder har en kant emellan sig, och därmed får olika färger. Det minsta antalet färger vi kan färga grafen med kommer precis att motsvara det minsta antalet lådor vi behöver.

För det andra problemet, antalet olika sätt Lisa kan packa sina lådor, tar man fram grafens kromatiska formel och använder den på det sätt som beskrivits i förra avsnittet. Att färga grafen på ett visst sätt motsvarar nämligen ett sätt att lägga sakerna i olika lådor, eftersom varje färg motsvarar en låda.

4.2 Lösning

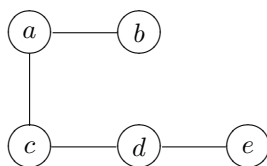
Vi illustrerar det hela genom att bestämma vad Lisa har för saker och ser vad vi får för resultat. Lisa skall ta med sig dator, sina CD-skivor, en vas, sina kläder, och färgburkar för att kunna måla om väggarna där hon ska bo. Datorn bör inte ligga tillsammans med vare sig CD-skivor, vas eller färgburkar, för färgen kan skada den, och den kan krossa skivorna och vasen. Kläderna och CD-skivorna bör inte heller hamna i samma låda som färgburkarna, för Lisa tror att även dessa kan skadas av färgen. Kallar vi datorn för a , vasen b , CD-skivorna för c , färgen för d och kläderna för e , så kan vi rita grafen vi får som i figur 6. De saker som inte skall ligga i samma låda har en kant mellan sig, precis som vi beskrivit, och vi kallar denna graf för L , samt en av kanterna för m .



Figur 6: Grafen L med Lisas saker

Grafen innehåller samma sorts "triangel" som grafen i figur 2, och den triangeln behövde 3 färger, så vi drar slutsatsen att 2 färger är för lite, men att 3 färger är tillräckligt för att färga grafen L . Noderna a och e kan få en färg, nod b och c en annan och nod d en tredje, utan att några sammankopplade noder får samma färg. Lisa behöver alltså minst 3 lådor för att kunna packa ned sina saker utan att riskera något.

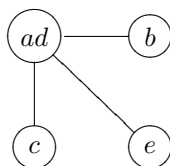
Försöker vi bestämma den kromatiska formeln med k färger till grafen L börjar vi med att ta bort en kant och föra samman dess noder, förslagsvis kanten m , och får då graferna L_m och L'_m , som visas i figur 7 och 8.



Figur 7: Grafen L_m

Vi bestämmer nu de kromatiska formlerna till graferna L_m och L'_m , vilket är en lättare uppgift än att ge sig på L direkt. L_m kan "dras ut" till en rak graf, med b och e i ändarna. Har vi sedan k färger till förfogande kan vi färga b på k stycken sätt, a på $k - 1$ stycken sätt, eftersom färgen i b är upptagen, och alla övriga noder på $k - 1$ sätt, eftersom det hela tiden finns en angränsande nod vars färg är upptagen. Den kromatiska formeln för L_m blir alltså:

$$P(L_m, k) = k(k - 1)(k - 1)(k - 1)(k - 1) = k(k - 1)^4$$



Figur 8: Grafen L'_m

Tittar vi på L'_m ser vi att noden ad kan färgas på k stycken sätt, medan de övriga kan färgas på $k - 1$ sätt, eftersom de alla är sammankopplade med ad och därmed inte kan färgas med samma färg som den noden. Den kromatiska formeln blir nu $P(L'_m, k) = k(k - 1)(k - 1)(k - 1) = k(k - 1)^3$. Enligt vår dekompositionsprincip blir den kromatiska formeln för grafen L följande:

$$P(L, k) = P(L_m, k) - P(L'_m, k) = k(k - 1)^4 - k(k - 1)^3 = k(k - 2)(k - 1)^3$$

Förenklingen av formeln fick vi genom att bryta ut faktorn $k(k - 1)^3$. Vi kan nu få fram det antal sätt på vilket Lisa kan packa sina saker i 3 stycken lådor genom att sätta k till 3. $P(L, 3) = 3 \cdot 1 \cdot 2^3 = 24$, så Lisa kan packa sina saker i 3 lådor på 24 olika sätt. Om Lisa råkar ha 4 lådor till förfogande och inte bryr sig om att en av dem är onödig, utan vill veta på hur många olika sätt hon packa ner sakerna i 4 stycken lådor, så får vi det genom att sätta k till 4. $P(L, 4) = 4 \cdot 2 \cdot 3^3 = 216$, så med 4 lådor har Lisa hela 216 stycken sätt att packa ned sina saker.

5 Slutsats

Jag har nu beskrivit och löst ett litet problem med hjälp av matematik. För att göra detta har jag gått igenom en del matematik ur området *grafteori*, och sedan använt denna matematik för att modellera problemet matematiskt och lösa det. Problemet handlade om att packa flyttlådor med olika saker, av vilka en del inte fick vara i samma låda, eftersom de skulle kunna ha sönder varandra. Vi ville hitta det minsta antalet lådor som behövdes, samt på hur många sätt dessa lådor kunde packas. Detta visade sig kunna modelleras med en graf. Därefter kunde man inse att lösningen på problemet var att hitta det minimala antalet färger för att färga noderna i grafen, samt att hitta den kromatiska formeln och med hjälp av den räkna ut på hur många sätt vi kunde färga noderna.

Syftet var att visa hur matematik kan användas i vardagliga sammanhang, och jag måste understryka att matematiken här var ett viktigt hjälpmedel. Hade vi inte känt till grafteori utan försökt lösa problemet direkt hade det blivit mycket svårare, men när vi gått igenom matematiken var det rätt lätt att se hur problemet skulle angripas och lösas. Man kan förstås tänka sig att man kunnat hitta minsta antalet lådor utan större behov av matematik, eftersom exemplet var så pass litet, men jag tror att man fått större problem med att hitta antalet sätt att packa lådorna. Då kan man säga att detta problem egentligen inte är så intressant, och det är sant att det kanske inte finns något reellt behov av att

veta på hur många sätt man kan packa några lådor, men om man nu vill veta detta så finns det alltså metoder för det.

Trots allt bör man kunna dra slutsatsen att matematik är användbart även i vardagliga sammanhang, och att det aldrig skadar att känna till lite matematik, eftersom det kan ge möjligheter att angripa problem som man annars inte skulle kunnat lösa. Givetvis finns det andra problem än packning där färgläggning av grafer kan komma till användning. Dessa blir dock mer komplicerade och skulle ta för stor plats för att kunna tas upp här.

Referenser

- [Beineke] BEINEKE, L. W. & WILSON R. J. 1978. *Selected Topics in Graph Theory*. Academic Press.
- [Grimaldi] GRIMALDI, R. P. 1994. *Discrete and combinatorial mathematics : an applied introduction*, 3rd edition. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [FCP] SAATY, T. L. & KAINEN, P. C. 1986. *The Four-Color Problem, Assaults and Conquest*. Dover Publications, Inc., New Work.
- [Wilson] WILSON R. J. 1985. *Introduction to Graph Theory*.