TYCHONOFFS SATS

HENRIK BÄÄRNHIELM, 790913-0473

SAMMANFATTNING. Denna uppsats handlar om Tychonoffs sats, som säger att produkten av godtyckligt många kompakta topologiska rum också är kompakt. Först berättas om upphovsmannen och en del historik kring satsen beskrivs, därefter redogörs för några tillämpningar av satsen, främst inom funktionanalys. Slutligen bevisas satsen utifrån endast grundläggande mängdlära och allmän topologi. I beviset behövs Zorns lemma, så ett bevis av detta välkända resultat ingår.

Innehåll

1. Inledning 2
2. Historik 2
2.1. Kompakthet 2
2.2. Allmän topologi 3
2.3. Valbarhetsaxiomet 4
3. Tillämpningar 4
3.1. Enhetsbollen i ett Hilbertrum är svagt kompakt 4
3.2. Kommutativa Banach-algebror 5
3.3. Stone-Ĉechs kompaktifiering 5
4. Bevis 5
4.1. Zorns lemma 5
4.2. Filter 7
4.3. Tychonoff 8
Referenser 10

1. Inledning

Ämnet för denna uppsats är *Tychonoffs sats*, ett abstrakt matematiskt teorem. Läsaren förutsätts ha matematisk mognad samt kunskaper i mängdlära, topologi och funktionalanalys för att kunna följa resonemangen. De grundläggande definitionerna i topologi och funktionalanalys som behövs kan återfinnas i [Bre93] respektive [Kre78].

Här kommer först att redogöras en del för historien kring Tychonoffs sats, när upphovsmannen levde, och i vilket sammanhang satsen kom till. Därefter kommer en del matematiska tillämpningar att beskrivas, och kopplingen till Tychonoffs sats tydliggöras. Slutligen kommer Tychonoffs sats att bevisas, vilket kommer inkludera ett bevis av Zorns lemma samt några resultat från teorin om filter, som brukar vara det som används för att bevisa Tychonoffs sats. Till att börja med formuleras satsen.

Sats 1 (Tychonoff)**.** *Låt $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ vara en familj av topologiska rum. Då gäller att produktrummet $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ med produkttopologin är kompakt om och endast om X_α är kompakt för varje $\alpha \in I$.*

Notera att I ej behöver vara ändlig. Detta är en av anledningarna till att satsen anses något märkvärdig, då kompakthet är ett begrepp som införts för att få en viss grad av "ändlighet" till de topologiska rummen. Man kanske då inte förväntar sig att kompaktheten skall bevaras när man tar produkten av oändligt många rum.

En annan anledning till att Tychonoffs sats är känd är att man behöver *Zorns lemma* (eller valbarhetsaxiomet) i beviset, och satsen är till och med ekvivalent med valbarhetsaxiomet. Eftersom valbarhetsaxiomet är (eller åtminstone har varit) något omstritt så har även Tychonoffs sats blivit omstridd.

2. Historik

Tychonoffs sats är förstås namngiven efter sin upphovsman, *Andrey Nikolayevich Tychonoff*, 1906–1993, (alternativt *Andrei Nikolaevich Tikhonov*). Han var en rysk matematiker med intressen och begåvning inom många områden av matematik, matematisk fysik och datalogi, och arbetet inom topologi utförde han tidigt i sitt liv. År 1922 började han studera vid Moskvas universitet, institutionen för matematik och fysik, och redan 1925 publicerade han sin första artikel, alltså medan han fortfarande gick grundutbildningen. Innan han började sin forskarutbildning år 1927 var han redan en respekterad matematiker, och det område han arbetade med i början var just det som numera kallas *allmän topologi*.

Flera resultat och begrepp inom det området bär Tychonoffs namn, såsom *Tychonoffrum* och *Tychonoffs fixpunktssats*, och den artikel där sats 1 första gången fanns med publicerades 1930, se [Tyc30]. Andra områden han senare kom att arbeta inom var funktionalanalys och partiella differentialekvationer på 30- och 40-talet, samt teoretisk datalogi på 60-talet.

2.1. Kompakthet.

Bakgrunden till Tychonoffs sats är intimt förknippad med begreppet kompakthet, och förstås med den moderna topologins historia i allmänhet. Ordet "kompakt" förekommer första gången i en artikel från 1906 av Maurice Fréchet (1878–1973) inom funktionalanalys, där han dock inte använder den nu använda definitionen, att varje öppen täckning har en ändlig deltäckning, utan den karaktärisering som visas i sats 7.4 i [Bre93]. Motiveringen till begreppet kom från att han ville generalisera idéerna kring Heine-Borels sats, resultatet som idag formuleras som att $S \subset \mathbb{R}$ är kompakt om och endast om S är sluten och begränsad (korollarium 8.7 i [Bre93]). Detta resultat är centralt för att visa när en reell kontinuerlig funktion antar maximum och minimum på ett intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, där $a, b \in \mathbb{R}$ (som bekant inträffar detta om intervallet är slutet, alltså kompakt, se sats 7.10 i [Bre93]), och Fréchet ville generalisera detta till funktionaler.

Kompakthet hos ett rum har som bekant sedan blivit ett mycket viktigt begrepp, eftersom det är så kraftfullt och medför som många trevliga egenskaper, men ändå uppfylls av en rätt stor klass av rum. Tychonoffs sats är exempelvis ett bevis för det senare, då den visar att kompakthet bevaras i produkttopologin även för oändliga produkter. Ett liknande begrepp *sekventiell kompakthet*, alltså att varje följd av punkter har en konvergent delföljd, bevaras inte i oändliga produkter, men kompakthet medför sekventiell kompakthet för de flesta intressanta rum, se [Vir03]. Detta motiverar till att som grundläggande definition välja kompakthet snarare än sekventiell kompakthet.

2.2. **Allmän topologi.** Den allmänna topologin i sin nuvarande form grundlades i början av 1900-talet, som en generalisering av Cantors studier av de reella talen i slutet av 1800-talet. Förutom Fréchet var en av huvudpersonerna Felix Hausdorff (1868–1942), som var den som införde definitionen av *topologiskt rum* som används idag.

För att införa generella topologiska rum kan man utgå från *avstånd* (metrik), *omgivning* eller *gränsvärde* (alltså följder av punkter). I det första fallet får man naturligt det som idag kallas *metriska rum*, och att utgå från följder och gränsvärden leder lätt till att man inför sekventiell kompakthet. Dessa möjligheter hade Fréchet studerat, och Hausdorff valde att istället ta fasta på omgivningar och öppna mängder, och införa de mer generella rum som idag kallas just topolgiska rum. Denna definition leder också naturligt till kompakthet snarare än sekventiell kompakthet, och som noterats ovan visar Tychonoffs sats att detta ett mer fördelaktigt.

Tychonoffs sats har alltså hjälpt till att motivera till vägvalen vid utvecklingen av topologin.

FIGUR 1. Andrey Nikolayevich Tychonoff

2.3. **Valbarhetsaxiomet.** I inledningen noterades att Tychonoffs sats är ett av de påståenden som är ekvivalenta med valbarhetsaxiomet (Axiom of Choice).

Axiom 1 (Valbarhet)**.** *Låt* $\{S_i\}_{i \in I}$ *vara en familj av icketomma mängder. Då finns en funktion* $f : I \to \bigcup_{i \in I} S_i$ *sådan att* $f(i) \in S_i$ *för varje* $i \in I$*.*

Detta axiom i mängdläran har som bekant varit något omstritt. Eftersom I ej behöver vara ändlig har man ansett att axiomet har varit alltför kraftigt för att kunna vara acceptabelt, då det i någon mening säger att man kan "välja" ett element från varje mängd i familjen, och att i ett svep göra oändligt många "val" (godtycklig oändlighetsordning dessutom) kanske inte alla tycker är en tillräckligt grundläggande operation för att ha det som axiom. Vissa ointuitiva resultat har också kunnat bevisas med dess hjälp, som *Banach-Tarskis paradox*, se [Fre97] för en utredning. Dock finns nog idag ingen större motvilja mot valbarhetsaxiomet, och en anledning är säkerligen att trevliga resultat som Tychonoffs sats behöver axiomet.

3. Tillämpningar

Tychonoffs sats används på flera håll i andra grenar av matematik, men främst inom funktionanalys. Några tillämpningar kommer nu att beskrivas, men fullständiga bevis kommer inte ges, eftersom det inte finns plats för detta i den här uppsatsen. Motivationen till de olika tillämpningarna beskrivs inte heller, utan endast skissartade argumentationer återfinns här.

3.1. **Enhetsbollen i ett Hilbertrum är svagt kompakt.** Som bekant gäller att om X är ett normerat vektorrum över en skalärkropp $\mathbb{K}$ kan man definiera *dualrummet* Y till X som rummet av linjära funktionaler på X. En linjär funktional är en linjär funktion $l : X \to \mathbb{K}$, och genom att definiera normen av en funktional som $\|l\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ blir Y också ett normerat vektorrum. Ett välkänt resultat i funktionalanalys säger att dualrummet alltid är komplett (alla Cauchy-följder konvergerar), så att dualen alltså är ett *Banachrum*, även om X inte är det.

Ett annat känt resultat i funktionalanalys säger att om X' är dual till X och X'' är dual till X' så finns en kanonisk avbildning $X \to X''$. Givet $x \in X$, definiera $y_x \in X''$ så att $y_x(f) = f(x)$ för varje $f \in X'$. På grund av detta brukar man skriva $X \subseteq X''$, och vidare säger man att X är *reflexivt* om $X = X''$.

Eftersom vi har en norm på X så är detta ett metriskt rum, men förutom topologin som då uppstår kan man definiera den *svaga topologin* som den minsta topologin så att varje $f \in X'$ är kontinuerlig. Det visar sig att enhetsbollen i X är kompakt i denna topologi om X är reflexivt (om X exempelvis är ett Hilbertrum är X alltid reflexivt).

För att visa detta betraktar man en annan topologi, nämligen den minsta topologin på X' så att $y_x \in X''$ är kontinuerlig för varje $x \in X$. Topologin kallas *svag**-topologin, och enhetsbollen I i X' kan nu visas vara kompakt i denna topologi, enligt följande: Låt D vara enhetsbollen i $\mathbb{K}$ och låt $D_x = \{z \cdot \|x\| \mid z \in D\}$. Då gäller att D_x är kompakt, och Tychonoff ger att $Y = \prod_{x \in X} D_x$ också är kompakt, så att varje slutet delrum till Y också är kompakt. Man kan nu visa att I är homeomorft med något slutet delrum till Y.

Om nu X är reflexivt så är den ovan nämnda topologin på X' densamma som den svaga topologin på X', så att enhetsbollen i X' är kompakt i den svaga topologin. Men samma argumentation kan användas på X'' eftersom detta är dualrummet till X', och vidare hade vi att $X = X''$ då X är reflexivt, så enhetsbollen i X är kompakt i den svaga topologin på X.

3.2. **Kommutativa Banach-algebror.** En kommutativ Banach-algebra är ett komplext Banach-rum B med en vektormultiplikation $\cdot$ som gör att B blir en kommutativ $\mathbb{C}$-algebra med etta, och som dessutom uppfyller $\|a \cdot b\| \leq \|a\|\|b\|$ för alla $a, b \in B$. Som bekant kan man precis som för ringar definiera ideal för en algebra, och alltså även maximalideal. Spektrumet S för en Banach-algebra B är mängden av alla maximalideal på B.

Det intressanta resultatet man kan visa med Tychonoffs sats är att spektrumet S är kompakt när B är en kommutativ Banach-algebra. För att göra detta utnyttjar man det förra resultatet ovan, att enhetsbollen i dualen B' är kompakt i *svag**-topologin. Man kan sedan visa att S är ett slutet delrum till denna enhetsboll, vilket medför att S är kompakt.

För att visa att S är ett delrum till enhetsbollen i dualrummet utnyttjar man det faktum att det finns en bijektion mellan S och mängden H av homomorfier $B \to \mathbb{C}$ (Gelfand-Mazurs sats). Man kan alltså betrakta H istället för S, och eftersom varje homomorfi är en linjär funktional på B med norm 1 är det klart att H är en delmängd till enhetsbollen i B'.

Man måste också visa att H är ett delrum under *svag**-topologin, och att H är sluten, men detta är för avancerat för att i detalj tas upp här. Det som behövs är en sats av Gelfand-Neumark.

3.3. **Stone-Ĉechs kompaktifiering.** Om X är ett topologiskt rum så är rummet $C(X)$ av begränsade kontinuerliga funktioner på X en Banach-algebra, och enligt resultatet ovan (som behöver Tychonoffs sats) är då spektrumet S till $C(X)$ kompakt. Det finns en kanonisk avbildning $\phi : X \to S$, där x avbildas på sin *annihilator*, $a_x = \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}$. Det är uppenbart att a_x är ett maximalideal, så att $a_x \in S$.

Om nu X är *komplett regelbunden* (se definition 9.5 i [Bre93]), så kan man visa att ϕ är en homeomorfi, alltså $X \cong \phi(X)$, och vidare är $\phi(X)$ tät i S. Man kan alltså se X som ett tätt delrum till S, så X är tät i ett kompakt rum, även om X själv inte är kompakt, vilket kan anses lite uppseendeväckande.

Spektrumet S av $C(X)$ kallas just *Stone-Ĉechs kompaktifiering* av X, och det har en del trevliga egenskaper. Exempelvis gäller att varje kontinuerlig funktion från X till ett Hausdorff-rum kan utvidgas till hela S.

4. Bevis

Här redovisas nu ett bevis för sats 1, utgående endast från grundläggande definitioner i allmän topologi. Bevisföringen kommer till största delen följa [Jän84] och använda *filter*. Ett alternativ finns i [Bre93], som istället är formulerat i termer av *nät*, ett besläktat begrepp.

4.1. **Zorns lemma.** Detta välkända resultat kommer att behövas, och för att tydliggöra hur Tychonoffs sats beror av valbarhetsaxiomet inkluderas beviset.

Definition 1. Om M är en mängd, så är en *partiell ordning* $\leq$ på M en relation som uppfyller

(1) (reflexitivitet) För varje $x \in M$ gäller $x \leq x$.
(2) (antisymmetri) Om $x \leq y$ och $y \leq x$ så $x = y$.

(3) (transitivitet) Om $x \leq y$ och $y \leq z$ så $x \leq z$.

Vidare kallas $(M, \leq)$ en *partiellt ordnad mängd*.

Definition 2. Låt $(M, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd. Då är $m \in M$ ett *maximalt element* om $m \leq x$ medför $x = m$ för varje $x \in M$.

Definition 3. Låt $(M, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd och låt $N \subseteq M$. Då är $m \in N$ ett *minsta element* i N om $m \leq x$ för varje $x \in N$, och detta skrivs då $m = \min N$.

Definition 4. Låt $(M, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd. En *kedja* K i M är en delmängd $K \subseteq M$ sådan att för varje $x, y \in K$ så gäller $x \leq y$ eller $y \leq x$.

Definition 5. Låt $(M, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd och låt K vara en kedja i M. Då sägs K vara *välordnad* om det i varje $\emptyset \neq L \subseteq K$ finns ett minsta element.

Definition 6. Låt $(M, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd och låt K vara en kedja i M. Då sägs K vara *begränsad* om det finns $m \in M$ så att $k \leq m$ för varje $k \in K$.

Definition 7. Låt $(M, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd och låt K vara en kedja i M. Givet $x \in K$ kallas $K_x = \{k \in K \mid k \leq x, k \neq x\}$ för *x-prefixet* i K.

Lemma 1 (Zorns lemma)**.** *Låt $(M, \leq)$ vara en partiellt ordnad mängd, och antag att varje kedja $K \subseteq M$ är begränsad. Då har $(M, \leq)$ ett maximalt element.*

Bevis. Antag att $(M, \leq)$ inte har ett maximalt element, så att det till varje $x \in M$ finns $y \neq x$ så att $x \leq y$. Låt $\mathcal{K}$ vara familjen av kedjor i M, och givet $K \in \mathcal{K}$, definiera

$$M_K = \{x \in M \mid x \leq k, \forall\, k \in K\}$$

Eftersom alla kedjor är begränsade är $M_K \neq \emptyset$ för varje $K \in \mathcal{K}$, och eftersom M inte har ett maximalt element finns $m \in M_K$ så att $m \notin K$. Enligt axiom 1 finns nu en funktion $f : \mathcal{K} \to \bigcup_{K \in \mathcal{K}} M_K$ så att $f(K) \in M_K$ för varje $L \in \mathcal{K}$, och det kan alltså utan vidare antas att $f(K) \notin K$.

Låt nu $\mathcal{S}$ vara familjen av kedjor K i M som uppfyller dels att K är välordnad och dels att om K_x är x-prefixet i K så gäller $x = f(K_x)$. Nu gäller två saker:

(1) Om $K, L \in \mathcal{S}$ och $K \neq L$ så gäller $L = K_x$ för något $x \in K$ eller $K = L_y$ för något $y \in L$.

(2) $\mathcal{S} \ni U = \bigcup_{K \in \mathcal{S}} K$

Till att börja med att visas (1). Tag $K, L \in \mathcal{S}$ så att $K \neq L$ och antag att $L \neq K_x$ för varje $x \in K$. Nu kan det antingen gälla $L \subset K$ eller $K \subset L$. Om $L \subset K$ så gäller $K \setminus L \neq \emptyset$, och eftersom K är välordnad finns ett minsta element $x = \min K \setminus L$. Detta ger också $K_x \subseteq L$, men enligt antagandet är $L \neq K_x$ så $L \setminus K_x \neq \emptyset$ och eftersom L är välordnad finns ett minsta element $y = \min L \setminus K_x$. Som ovan ger detta $L_y \subseteq K_x$, och $y \in L \setminus K_x$ medför $y \in L$ och $y \notin K_x$. Men $L \subset K$ så $y \in K$, men $y \notin K_x$ så $x \leq y$. För varje $a \in K_x$ gäller nu dels $a \in L$ eftersom $K_x \subseteq L$, och även $a \leq x \leq y$ samt $a \neq x$. Om $a = y$ så fås $y \leq a \leq x$ och därmed $y = x \in L$, vilket motsäger definitionen av x. Alltså gäller $a \neq y$ och därmed $a \in L_y$, så att $K_x = L_y$. Detta ger $x = f(K_x) = f(L_y) = y$ vilket återigen motsäger definitionen av x, så $L \subset K$ måste vara falskt.

Då gäller istället $K \subset L$, och alltså $L \setminus K \neq \emptyset$. Låt därför $z = \min L \setminus K$, vilket som ovan ger $L_z \subseteq K$. För att även visa $K \subseteq L_z$, så antag motsatsen, alltså $K \setminus L_z \neq \emptyset$ och låt $k = \min K \setminus L_z$, så att $K_k \subseteq L_z$. Som ovan gäller nu $k \in L$ då

$K \subset L$ och därmed $k \leq z$. För varje $a \in L_z$ fås som ovan $a \leq z \leq k$ och $a \neq z$, och precis som ovan ger detta $k = z \in L$ vilket motsäger definitionen av k. Alltså måste $K \setminus L_z = \emptyset$ och därmed $K = L_z$, vilket bevisar (1).

För att visa (2) kan man notera att U uppenbarligen är en kedja, så om $A \subseteq U$ så $A \subseteq U_k$ för något $k \in U$ då varje kedja är begränsad. Men $U_k = K_k$ för något $K \subseteq U$ och alltså $U_k = L \subseteq U$ enligt (1). Eftersom L är välordnad har då A ett minsta element, och alltså är U välordnad. Vidare gäller $f(U_k) = f(K_k) = k$ så $U \in \mathcal{S}$, vilket bevisar (2).

Nu gäller förstås att $U \cup \{f(U)\}$ är en kedja och uppfyller villkoren för $\mathcal{S}$, så att $U \cup \{f(U)\} \subseteq U$ vilket motsäger att $f(U) \notin U$. Därmed måste $(M, \leq)$ ha ett maximalt element. □

4.2. **Filter.** För att visa Tychonoffs sats skall *filter* utnyttjas. Motivationen bakom detta begrepp kommer inte att redogöras för, utan här kommer endast definitionen och de resultat som behövs att redovisas.

I detta avsnitt behandlas allmänna filter på mängder.

Definition 8. Ett *filter* på en mängd X är en familj $\mathcal{F}$ av delmängder till X som uppfyller

(1) Om $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ så $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
(2) Om $F \in \mathcal{F}$ och $F \subseteq G$ så $G \in \mathcal{F}$.
(3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Definition 9. Låt $\{\mathcal{F}\}$ vara mängden av filter på X. Maximala element i $(\{\mathcal{F}\}, \subseteq)$ kallas *ultrafilter*.

Proposition 1. *Om $\mathcal{F}$ är ett filter på X så $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ där $\mathcal{U}$ är ett ultrafilter på X.*

Bevis. Låt $\mathfrak{F}$ vara mängden av filter på X så att $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ för varje $\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}$. Då är $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ en partiellt ordnad mängd, och varje kedja är begränsad, ty betrakta $\mathcal{P}_X = \{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset\}$. Uppenbarligen gäller $\mathcal{P}_X \in \mathfrak{F}$, och eftersom $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}_X$ för varje $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$ så är detta speciellt en begränsning av varje kedja. Lemma 1 ger då att $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ har ett maximalt element $\mathcal{M}$.

Nu gäller att $\mathcal{M}$ är ett ultrafilter, eftersom $\mathcal{M}$ även är ett maximalt element i $(\{\mathcal{G}\}, \subseteq)$ där $\{\mathcal{G}\}$ är alla filter på X. Om så inte vore fallet skulle det finnas ett maximalt element $\mathcal{M}'$ (eftersom varje kedja i $(\{\mathcal{G}\}, \subseteq)$ också är begränsad av $\mathcal{P}_X$) så att $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$, men då gäller att $\mathcal{F} \in \mathcal{M}'$ så att $\mathcal{M}' \in \mathfrak{F}$ och då måste $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ då $\mathcal{M}$ är maximalt i $(\mathfrak{F}, \subseteq)$. □

Proposition 2. *Om $\mathcal{U}$ är ett ultrafilter på X och $A \subseteq X$, så gäller att $A \in \mathcal{U}$ eller $X \setminus A \in \mathcal{U}$, men inte båda.*

Bevis. Antag att både A och $X \setminus A$ ligger i $\mathcal{U}$. Då måste $A \cap (X \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{U}$, vilket ej är fallet i ett filter.

Vidare gäller att $A \cap F \neq \emptyset$ för varje $F \in \mathcal{U}$ eller $(X \setminus A) \cap F \neq \emptyset$ för varje $F \in \mathcal{U}$. Om detta inte gällde skulle det finnas $F \in \mathcal{U}$ och $G \in \mathcal{U}$ så att $A \cap F = \emptyset$ och $(X \setminus A) \cap G = \emptyset$, men då gäller $F \cap G = \emptyset \in \mathcal{U}$ vilket ej är fallet i ett filter.

Antag därför att $A \cap F \neq \emptyset$ för varje $F \in \mathcal{U}$ och definiera

$$\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \mid Y \supseteq A \cap F,\ F \in \mathcal{U}\}$$

Nu gäller att $\mathcal{F}$ är ett filter på X. Vi har att $\emptyset \notin \mathcal{F}$ då $A \cap F \neq \emptyset$ för varje $F \in \mathcal{U}$ enligt ovan. Vidare gäller att om $Y \in \mathcal{F}$ och $Y \supseteq A \cap F$ för något $F \in \mathcal{U}$ så gäller förstås $Y' \in \mathcal{F}$ för varje $Y' \supseteq Y$, ty även $Y' \supseteq A \cap F$. För att visa det sista filtervillkoret, tag $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$ så att $Y_1 \supseteq A \cap F_1$ och $Y_2 \supseteq A \cap F_2$ för några $F_1, F_2 \in \mathcal{U}$. Då gäller att

$$Y_1 \cap Y_2 \supseteq (A \cap F_1) \cap (A \cap F_2) = A \cap (F_1 \cap F_2) = A \cap F_3$$

där $F_3 \in \mathcal{U}$ eftersom det är ett filter. Detta visar att $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F}$ och alltså är även $\mathcal{F}$ ett filter.

Speciellt gäller nu $A \supseteq A \cap F$ för varje $F \in \mathcal{U}$, så att $A \in \mathcal{F}$. Men eftersom $\mathcal{U}$ är ett ultrafilter så gäller $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, så $A \in \mathcal{U}$.

Om istället $(X \setminus A) \cap F \neq \emptyset$ för varje $F \in \mathcal{U}$ följer på samma sätt att $X \setminus A \in \mathcal{U}$. □

4.3. **Tychonoff.** Nu kommer de specifika resultat från filterteorin som hänger ihop med topologiska rum att gås igenom, för att till slut utmynna i ett bevis av Tychonoffs sats.

Definition 10. Ett filter $\mathcal{F}$ på ett topologiskt rum X sägs *konvergera* mot $a \in X$ om varje omgivning till a ligger i $\mathcal{F}$.

Definition 11. Om $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ är en familj av topologiska rum, så definieras *projektionen*

$$\pi_\alpha : \prod_{\beta \in I} X_\beta \to X_\alpha$$

så att $\pi_\alpha(\{x_\beta\}_{\beta \in I}) = x_\alpha$ för varje $\alpha \in I$.

Följande resultat är precis proposition 8.1 i kapitel 1 i [Bre93], och ges utan bevis.

Proposition 3. *Om $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ är en familj av topologiska rum, så är π_α kontinuerlig för varje $\alpha \in I$.*

Även följande resultat är välkänt, se sats 7.6 i kapitel 1 i [Bre93], och ges utan bevis.

Proposition 4. *Om X är ett kompakt topologiskt rum och $f : X \to Y$ är kontinuerlig så är $f(X)$ kompakt.*

Följande lemma är centralt i bevisföringen. Det är här den speciella definitionen av produkttopologin utnyttjas för att kunna ta steget från ändliga till godtyckliga produkter.

Lemma 2. *Låt $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ vara en familj av topologiska rum, och låt $\mathcal{F}$ vara ett filter på $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Då konvergerar $\mathcal{F}$ mot $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ om $\pi_\alpha(\mathcal{F}) = \{\pi_\alpha(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ konvergerar mot x_α för varje $\alpha \in I$.*

Bevis. Tag en omgivning $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ till $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$. Per definition av produkttopologin gäller att en bas för denna är mängder på formen $(B_\beta)_{\beta \in I}$ där B_β är öppen i X_β och högst ändligt många $B_\beta \neq X_\beta$. Av detta följer

$$(U_\alpha)_{\alpha \in I} = \left(\cup_\beta B_\alpha^\beta\right)_{\alpha \in I}$$

och det finns en ändlig uppsättning $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ så att $U_{\alpha_i} \neq X_{\alpha_i}$ för $1 \leq i \leq n$ och $U_\alpha = X_\alpha$ om $\alpha \notin \{\alpha_i\}_{i=1}^n$.

För $1 \leq i \leq n$ gäller $\pi_{\alpha_i}((U_\beta)_{\beta \in I}) = U_{\alpha_i} \neq X_{\alpha_i}$ som är en omgivning till x_{α_i}, och därmed gäller $U_{\alpha_i} \in \pi_{\alpha_i}(\mathcal{F})$. Det finns alltså $F_{\alpha_i} \in \mathcal{F}$ så att $\pi_{\alpha_i}(F_{\alpha_i}) = U_{\alpha_i}$.

Låt nu $F = \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$, och eftersom $\mathcal{F}$ är ett filter gäller $F \in \mathcal{F}$, då $F_{\alpha_i} \in \mathcal{F}$ för $1 \leq i \leq n$. Vidare gäller $F \subseteq (U_\alpha)_{\alpha \in I}$, eftersom $\pi_{\alpha_i}(F) \subseteq \pi_{\alpha_i}(F_{\alpha_i}) = U_{\alpha_i} = \pi_{\alpha_i}((U_\beta)_{\beta \in I})$ för $1 \leq i \leq n$ och givetvis även $\pi_\alpha(F) \subseteq X_\alpha = \pi_\alpha((U_\beta)_{\beta \in I})$ då $\alpha \notin \{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$. Men eftersom $\mathcal{F}$ är ett filter och $F \in \mathcal{F}$ gäller då även $(U_\alpha)_{\alpha \in I} \in \mathcal{F}$ så att $\mathcal{F}$ konvergerar mot $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$. □

Lemma 3. *Om X är ett topologiskt rum så gäller att varje ultrafilter på X konvergerar om och endast om X är kompakt.*

Bevis. Antag först att varje ultrafilter konvergerar på X och antag att det finns en öppen täckning $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ av X som inte har någon ändlig deltäckning. För varje ändlig uppsättning $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subseteq I$ gäller då att $X \setminus (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}) \neq \emptyset$. Definiera

$$\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \mid Y \supseteq X \setminus (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}),\ \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subseteq I\}$$

Uppenbarligen gäller från konstruktionen att $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Om $Y \in \mathcal{F}$ så att $Y \supseteq X \setminus (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n})$ för någon ändlig uppsättning $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subseteq I$, så gäller förstås också $Y' \supseteq X \setminus (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n})$ för varje $Y' \supseteq Y$, och alltså gäller $Y' \in \mathcal{F}$.

Tag nu $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$, där $Y_1 \supseteq X \setminus (U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n})$ för någon ändlig uppsättning $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subseteq I$ och $Y_2 \supseteq X \setminus (U_{\beta_1} \cup U_{\beta_2} \cup \cdots \cup U_{\beta_n})$ för någon ändlig uppsättning $\{\beta_i\}_{i=1}^{n} \subseteq I$. Då gäller

$$Y_1 \cap Y_2 \supseteq X \setminus (U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \cup U_{\beta_1} \cup \cdots \cup U_{\beta_n})$$

och alltså $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F}$. Därmed är $\mathcal{F}$ ett filter på X, och enligt proposition 1 finns ett ultrafilter $\mathcal{U}$ på X så att $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Enligt vårt antagande konvergerar $\mathcal{U}$ mot något $a \in X$ och då finns $\alpha \in I$ så att $a \in U_\alpha$ eftersom det är en täckning.

Eftersom $\mathcal{U}$ konvergerar mot a måste $U_\alpha \in \mathcal{U}$, eftersom det är en omgivning till a. Men per definition av $\mathcal{F}$ gäller att $X \setminus U_\alpha \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, så att både $U_\alpha \in \mathcal{U}$ och $X \setminus U_\alpha \in \mathcal{U}$, vilket är omöjligt enligt proposition 2.

Antag omvänt att X är kompakt och låt $\mathcal{U}$ vara ett ultrafilter på X. Antag att $\mathcal{U}$ inte konvergerar, så att för varje $x \in X$ finns en omgivning $O_x \notin \mathcal{U}$. Då gäller att $\{O_x\}_{x \in X}$ är en öppen täckning av X och eftersom X är kompakt finns en ändlig deltäckning $\{O_{x_i}\}_{i=1}^{n}$. Men eftersom $O_{x_i} \notin \mathcal{U}$ så måste $X \setminus O_{x_i} \in \mathcal{U}$ för $1 \leq i \leq n$, enligt proposition 2, och eftersom $\mathcal{U}$ är ett filter gäller då även $\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus O_{x_i} \in \mathcal{U}$.

Från DeMorgans lagar följer att eftersom $X = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$ så gäller

$$\emptyset = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i} = \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus O_{x_i}$$

vilket ger en motsägelse då $\emptyset \notin \mathcal{U}$· □

Till slut kan nu Tychonoffs sats bevisas.

Bevis av sats 1. Antag att $Y = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ är kompakt. Enligt proposition 3 är π_α är kontinerlig för varje $\alpha \in I$, och eftersom π_α och är surjektiv så ger proposition 4 att X_α är kompakt.

Omvänt, antag att X_α är kompakt för varje $\alpha \in I$, och låt $\mathcal{U}$ vara ett ultrafilter på Y. Då är $\pi_\alpha(\mathcal{U})$ ett ultrafilter på X_α för varje $\alpha \in I$, och enligt lemma 3 konvergerar $\pi_\alpha(\mathcal{U})$ mot $x_\alpha \in X_\alpha$ eftersom X_α är kompakt. Enligt lemma 2 konvergerar då $\mathcal{U}$ mot $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \in Y$. Därmed konvergerar varje ultrafilter på Y, och lemma 3 ger då att Y är kompakt. □

Referenser

[Bre93] Glen E. Bredon, *Topology and geometry*, pp. 1–25, Springer, 1993.

[Dug66] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.

[Fre97] *Frequently Asked Questions in Mathematics*, 1997, http://db.uwaterloo.ca/~alopez-o/math-faq/.

[Jän84] Klaus Jänich, *Topology*, ch. 10, Springer, 1984.

[Kat98] Victor J. Katz, *A history of Mathematics - an introduction*, second ed., ch. 18.2, Addison–Wesley, 1998.

[Kre78] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, 1978.

[RO03] Edmund F. Robertson and John J. O'Connor, *The MacTutor History of Mathematics archive*, 2003, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html.

[Tyc30] Andrey Nikolayevich Tychonoff, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Annalen (1930), 544–561.

[Vir03] O. Ya. Viro, *Elementary topology, textbook in problems*, ch. 1–15, 2003, http://www.math.uu.se/~oleg/educ-texts.html.

E-mail address: `fk03hba@math.su.se`